

ЗМІСТ

Передмова	11
 ЧАСТИНА 1	
Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН І МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ	14
§ 1. Елементи теорії множин	14
1.1. Множини і підмножини	14
1.2. Операції над множинами та їх властивості.....	17
1.3. Прямий добуток множин. Відношення між елементами множин. Функції, алгебраїчні операції	20
1.4. Поняття групи, кільця і поля	23
§ 2. Елементи математичної логіки	24
2.1. Висловлення і логічні операції над ними	24
2.2. Предикати. Логічні операції над предикатами. Квантор	28
Задачі	33
Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	38
§ 1. Визначники другого і третього порядків	38
§ 2. Поняття про визначники вищих порядків	44
§ 3. Матриці та дії над ними	46
§ 4. Обернена матриця. Ранг матриці	50
§ 5. Системи лінійних рівнянь	53
5.1. Основні означення	53
5.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера	55
5.3. Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими в матричній формі.....	57
5.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса	58
5.5. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь	61
Задачі	62
Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	68
§ 1. Вектори і лінійні дії над ними	68
1.1. Скалярні і векторні величини. Вектори та їх взаємне розташування у просторі	68
1.2. Лінійні дії над векторами.....	69
1.3. Лінійні комбінації векторів. Базиси. Розклад вектора за базисом	73
1.4. Поняття про n -вимірний простір.....	75
1.5. Проекція вектора на вісь	78
§ 2. Системи координат	80
2.1. Система координат на прямій лінії	81

2.2. Декартова система координат на площині	81
2.3. Полярна система координат	83
2.4. Декартова система координат у просторі	84
2.5. Циліндрична система координат	87
2.6. Сферична система координат	88
2.7. Перетворення координат	89
2.7.1. Паралельне перенесення осей	89
2.7.2. Поворот осей координат	90
§ 3. Вектори в системі координат	90
3.1. Вектори в системі координат на прямій	90
3.2. Вектори в прямокутній декартовій системі координат на площині	91
3.3. Вектори в прямокутній декартовій системі координат у просторі	92
3.4. Поділ відрізка в заданому відношенні	95
§ 4. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів	96
4.1. Скалярний добуток двох векторів та його властивості	96
4.1.1. Алгебраїчні властивості скалярного добутку	97
4.1.2. Геометричні властивості скалярного добутку	98
4.2. Векторний добуток двох векторів та його властивості	99
4.2.1. Алгебраїчні властивості векторного добутку двох векторів	100
4.2.2. Геометричні властивості векторного добутку двох векторів	100
4.3. Мішаний добуток векторів та його властивості	101
Задачі	104
Розділ 4. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ	110
§ 1. Лінії на площині та їх рівняння	110
1.1. Поняття про лінію та її рівняння	110
1.2. Полярне рівняння лінії	112
1.3. Параметричні рівняння ліній	114
1.4. Векторне рівняння лінії	115
§ 2. Пряма на площині	116
2.1. Різні види рівнянь прямої на площині	116
2.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих	121
2.3. Відстань від точки до прямої	125
2.4. Рівняння пучка прямих	127
§ 3. Поверхні і лінії в просторі та їх рівняння	128
3.1. Поверхня та її рівняння	128
3.2. Рівняння ліній в просторі	129
§ 4. Пряма лінія в просторі	130
4.1. Різні види рівнянь прямої в просторі	130
4.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих	134

4.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини	135
§ 5. Площина в просторі.....	136
5.1. Різні види рівнянь площини в просторі.....	136
5.2. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.....	141
5.3. Відстань від точки до площини.....	142
§ 6. Лінії другого порядку	143
6.1. Поняття ліній другого порядку	143
6.2. Коло.....	144
6.3. Еліпс.....	145
6.4. Гіпербола	148
6.5. Парабола.....	152
6.6. Полярні та параметричні рівняння кривих другого порядку	155
§ 7. Поверхні другого порядку	156
7.1. Поняття поверхні другого порядку.....	156
7.2. Сфера.....	157
7.3. Еліпсоїд.....	158
7.4. Гіперболоїди.....	159
7.5. Параболоїди.....	162
7.6. Циліндричні поверхні	164
7.7. Поверхні обертання.....	166
7.8. Конічні поверхні	168
7.9. Лінійчаті поверхні	169
Задачі.....	170

Розділ 5. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОГОЧЛЕНІВ..... 185

§ 1. Комплексні числа та дії над ними.....	185
1.1. Поняття комплексного числа	185
1.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі	186
1.3. Геометрична інтерпретація комплексних чисел	189
1.4. Тригонометрична форма комплексних чисел.....	191
1.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі	193
§ 2. Поняття многочлена від однієї змінної. Дії над многочленами	198
§ 3. Ділення многочлена на двочлен $x - a$. Схема Горнера. Корені многочлена. Теорема Безу. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.....	206
§ 4. Многочлени над полями комплексних, дійсних і раціональних чисел. 209	209
4.1. Многочлени над полями комплексних і дійсних чисел	209
4.2. Многочлени над полем раціональних чисел	210
§ 5. Раціональні дроби.....	212
Задачі.....	217

ЧАСТИНА 2

Розділ 1. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ НАЙПРОСТІШІ КЛАСИФІКАЦІЇ	226
§ 1. Поняття функції. Способи задання функції	226
1.1. Поняття функції.....	226
1.2. Способи задання функції.....	227
§ 2. Найпростіші класифікації функцій	229
2.1. Парні і непарні функції.....	229
2.2. Періодичні функції.....	231
2.3. Обмежені і необмежені функції.....	232
2.4. Монотонні функції.....	232
Задачі	233
Розділ 2. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ	240
§ 1. Границя послідовності	240
§ 2. Границя функції в точці	244
§ 3. Границя функції на нескінченності. Нескінченні границі	249
3.1. Границя функції на нескінченності.....	249
3.2. Нескінченні границі.....	253
§ 4. Неперервність функції	254
§ 5. Властивості функцій, неперервних на відрізку	257
Задачі	258
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	270
§ 1. Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної	270
§ 2. Правила диференціювання	276
§ 3. Диференціал функції	279
§ 4. Основні теореми диференціального числення	282
§ 5. Застосування теореми Лагранжа	285
5.1. Умови сталості функції.....	285
5.2. Умови монотонності функції.....	286
§ 6. Застосування теореми Коші. Теореми Лопітала	288
§ 7. Розкриття інших невизначеностей	291
§ 8. Похідні та диференціали вищих порядків	292
§ 9. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину	295
§ 10. Теорема Тейлора	297
§ 11. Дослідження функцій та побудова їх графіків	300
Задачі	303
Розділ 4. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	314
§ 1. Первісна функція	314
§ 2. Невизначений інтеграл	315

§ 3. Основні методи інтегрування функцій	318
3.1. Інтегрування частинами	318
3.2. Інтегрування підстановкою	320
§ 4. Інтегрування раціональних функцій.....	321
§ 5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.....	323
§ 6. Інтегрування тригонометричних функцій	325
Задачі.....	327
Розділ 5. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	334
§ 1. Задача про площу криволінійної трапеції. Означення визначеного інтеграла.....	334
§ 2. Властивості визначеного інтеграла	337
§ 3. Обчислення визначеного інтеграла	339
3.1. Обчислення визначеного інтеграла за означенням	339
3.2. Формула Ньютона – Лейбніца	340
3.3. Обчислення визначеного інтеграла частинами	342
3.4. Обчислення визначеного інтеграла підстановкою	342
3.5. Наближене обчислення визначених інтегралів	343
§ 4. Геометричні застосування визначеного інтеграла	345
4.1. Обчислення площ плоских фігур у декартових координатах	345
4.2. Обчислення площ плоских фігур у полярних координатах.....	346
4.3. Обчислення площ плоских фігур, обмежених кривими, які задані параметрично	347
4.4. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами паралельних перерізів	348
4.5. Обчислення довжини кривої.....	350
§ 5. Фізичні застосування визначеного інтеграла	352
5.1. Обчислення шляху прямолінійного змінного руху	352
5.2. Обчислення роботи змінної сили.....	352
5.3. Обчислення сили тиску рідини на поверхню	354
§ 6. Невласні інтеграли	355
6.1. Невласні інтеграли на нескінченних проміжках	355
6.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій	357
6.3. Гама-функція Ейлера	359
Задачі	360
Розділ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	366
§ 1. Границя і неперервність функцій багатьох змінних	366
§ 2. Частинні похідні	368
§ 3. Диференційовні функції двох змінних.....	370
§ 4. Повний диференціал функції двох змінних.....	372
§ 5. Неявні функції однієї і двох змінних.....	374

§ 6. Частинні похідні і диференціали вищих порядків.....	378
6.1. Частинні похідні вищих порядків.....	378
6.2. Диференціали вищих порядків.....	379
6.3. Формула Тейлора для функції двох змінних.....	380
§ 7. Екстремум функції двох змінних.....	381
§ 8. Умовний екстремум.....	385
§ 9. Метод найменших квадратів.....	390
Задачі.....	392
Розділ 7. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	397
§ 1. Задачі, що приводять до подвійного інтеграла. Означення і властивості подвійного інтеграла.....	397
1.1. Задача про масу неоднорідної пластинки.....	397
1.2. Означення подвійного інтеграла.....	398
1.3. Властивості подвійного інтеграла.....	399
§ 2. Обчислення подвійного інтеграла.....	400
2.1. Обчислення подвійного інтеграла у декартових координатах.....	400
2.2. Обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах.....	403
§ 3. Застосування подвійних інтегралів.....	404
3.1. Геометричні застосування подвійних інтегралів.....	404
3.2. Фізичні застосування подвійних інтегралів.....	406
§ 4. Потрійний інтеграл.....	409
§ 5. Обчислення потрійного інтеграла.....	410
5.1. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.....	410
5.2. Обчислення потрійного інтеграла у циліндричних координатах.....	412
5.3. Обчислення потрійного інтеграла у сферичних координатах.....	414
§ 6. Застосування потрійних інтегралів.....	415
§ 7. Криволінійні інтеграли по координатах.....	417
§ 8. Обчислення криволінійних інтегралів по координатах.....	420
§ 9. Формула Гріна – Остроградського.....	423
§ 10. Незалежність криволінійного інтеграла по координатах від форми шляху інтегрування.....	425
§ 11. Відновлення функції двох змінних за її повним диференціалом.....	427
Задачі.....	430
Розділ 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	437
§ 1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття.....	437
§ 2. Диференціальні рівняння першого порядку. Теорема Коші існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння.....	440
§ 3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	441
§ 4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.....	445
§ 5. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	448

§ 6. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.....	449
§ 7. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.....	451
§ 8. Дослідження коливних процесів.....	456
§ 9. Лінійні системи диференціальних рівнянь першого порядку.....	459
Задачі.....	462
Розділ 9. РЯДИ.....	468
§ 1. Поняття ряду, його збіжності і суми.....	468
§ 2. Геометрична прогресія і гармонічний ряд.....	471
§ 3. Знаки збіжності додатних рядів.....	473
§ 4. Степеневі ряди.....	478
§ 5. Ряд Тейлора.....	481
§ 6. Розвинення основних елементарних функцій у степеневі ряди.....	484
§ 7. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.....	485
7.1. Обчислення значень функції e^x	485
7.2. Обчислення числа π	486
7.3. Обчислення коренів.....	486
7.4. Обчислення логарифмів.....	487
7.5. Обчислення визначених інтегралів.....	488
7.6. Розв'язування диференціальних рівнянь.....	489
§ 8. Тригонометричні ряди Фур'є.....	489
Задачі.....	493
Розділ 10. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	498
§ 1. Події та операції над ними.....	498
§ 2. Імовірність події.....	500
2.1. Класичне означення ймовірності.....	501
2.2. Статистичне означення ймовірності.....	502
2.3. Аксиоматичне означення ймовірності.....	504
§ 3. Теореми про ймовірність події.....	506
§ 4. Умовна ймовірність.....	508
§ 5. Незалежні випробування. Схема та формула Бернуллі, їх узагальнення.....	512
§ 6. Випадкові величини.....	516
6.1. Закон розподілу випадкової величини.....	516
6.2. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин.....	519
6.3. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин.....	519
§ 7. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини.....	521
7.1. Математичне сподівання і дисперсія дискретної випадкової величини.....	521
7.2. Математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини.....	525

§ 8. Закон великих чисел	528
Задачі	531
Розділ 11. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ	539
§ 1. Генеральна сукупність та вибірка	539
§ 2. Оцінка параметрів генеральної сукупності за її вибіркою	544
2.1. Генеральна і вибіркова середні	544
2.2. Генеральна і вибіркова дисперсії	546
2.3. Оцінка параметрів розподілу	548
§ 3. Довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу	551
3.1. Надійність. Довірчі інтервали	551
3.2. Довірчий інтервал для математичного сподівання при відомому σ	552
3.3. Довірчий інтервал для математичного сподівання при невідомому σ	554
3.4. Довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення	554
3.5. Оцінка істинного значення вимірюваної величини та точності вимірювань	555
§ 4. Перевірка статистичних гіпотез	556
§ 5. Лінійна кореляція	560
Задачі	562
Додаток 1. ГРЕЦЬКИЙ ТА ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТИ	567
Додаток 2. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ	568
Додаток 3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ	570
Додаток 4. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	576
Додаток 5. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$	578
Додаток 6. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $P(\lambda) = 1 - \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 \lambda^2}$	579
Додаток 7. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $t_\gamma = t(\gamma, n)$	580
Додаток 8. КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ χ^2	581
Відповіді	582
Список рекомендованої та використаної літератури	604
Предметний покажчик	606

Передмова

Ця книга призначена для студентів вищих навчальних закладів природничих, економічних та інших нематематичних спеціальностей, що вивчають вищу математику та інформатику. Вона може бути корисною і читачам, які бажають самостійно ознайомитись з коротким курсом вищої математики, що містить основи теорії систем лінійних рівнянь і многочленів, векторної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення, теорії ймовірностей та математичної статистики. При цьому передбачається, що читач володіє шкільним курсом математики.

До положень, якими керувались автори при написанні посібника, входять:

- 1) поєднання доступності, наукової строгості і компактності викладу матеріалу;
- 2) супровід викладу теоретичного матеріалу значною кількістю детально проаналізованих прикладів застосування тих чи інших теоретичних положень;
- 3) поєднання теоретичного матеріалу і матеріалу для практичних занять в одній книзі;
- 4) сприяння свідомому засвоєнню основних понять різних розділів математики студентами вищих навчальних закладів, для яких математика не є профільюючим предметом.

Перша частина посібника складається з п'яти розділів.

Перший розділ є вступним до курсу. В ньому розглядаються елементи теорії множин і математичної логіки. Автори вважають, що на заняттях буде активно використовуватись відповідна математична символіка, розвинута в цьому розділі. Проте в самому посібнику теоретико-множинна і логічна символіка використовується обмежено через те, що автори передбачили в деяких випадках можливість незалежного вивчення різних розділів курсу вищої математики.

Другий розділ знайомить читача з елементами теорії визначників, матриць і систем лінійних рівнянь. Кінцева мета вивчення розділу – вміти досліджувати і розв'язувати різними методами довільні системи лінійних рівнянь, що мають скінченне число рівнянь і невідомих.

У третьому розділі досить детально вивчаються вектори та дії над ними (додавання векторів, множення векторів на число, скалярний, векторний, мішаний добуток векторів та їх застосування), різні системи координат на площині та в просторі, формується поняття n – вимірного простору.

Четвертий розділ присвячено аналітичній геометрії, а саме: вивченню прямих і ліній другого порядку на площині, площини, прямої і поверхонь другого порядку у просторі. Тут активно використовується векторна алгебра.

У п'ятому розділі розглядається елементарна теорія комплексних чисел, яка включає дії над комплексними числами в алгебраїчній і тригонометричній

формах, та основи теорій многочленів і раціональних дробів від однієї змінної. При вивченні многочленів наголошується на теорії подільності та проблемі існування та обчислення коренів многочленів, заданих над числовими полями.

Друга частина посібника складається з одинадцяти розділів.

У першому й другому розділах розглядаються поняття функції, способи її задання й найпростіші властивості, границя функції в точці й на нескінченості, зокрема границя послідовності, а також застосування цих понять при дослідженні асимптотичної поведінки функції.

У третьому, четвертому й п'ятому розділах викладено традиційний матеріал з диференціального й інтегрального числення: задачі, що приводять до понять похідної та інтеграла, властивості й обчислення похідних та інтегралів, застосування похідних при дослідженні функцій, розв'язування задач на екстремум, геометричні та фізичні застосування інтегралів.

У шостому й сьомому розділах розглядається диференціальне й інтегральне числення функцій багатьох змінних, його застосування до задач математики і природознавства, зокрема метод найменших квадратів, зв'язки кратних, криволінійних і визначають інтегралів.

У восьмому розділі розглядаються задачі, що приводять до диференціальних рівнянь, подана класифікація рівнянь і методи їх розв'язання, наведені конкретні приклади практичних застосувань диференціальних рівнянь.

Дев'ятий розділ присвячений теорії числових і функціональних рядів, а саме: вивченню ознак збіжності числових рядів, степеневих рядів, ряду Тейлора; розвиненню у степеневі ряди основних елементарних функцій; застосуванню рядів до наближених обчислень; тригонометричні ряди Фур'є.

Десятий розділ присвячено елементам теорії ймовірностей. Мета даного розділу – ознайомити читача з класифікацією подій, ймовірністю подій, різними означеннями ймовірності. У розділі подається схема та формули Бернуллі, розглядається математичне сподівання й дисперсія, закон великих чисел.

В одинадцятому розділі розглядаються елементи математичної статистики (генеральна сукупність і вибірка, оцінка параметрів генеральної сукупності за її вибіркою, довірчі інтервали параметрів розподілу, лінійна кореляція).

Кожний розділ обох частин містить значну кількість детально розв'язаних задач, які демонструють застосування теоретичних положень, алгоритми розв'язування задач, порядок записів розв'язків тощо.

До кожного розділу подаються задачі для практичних занять і задачі для самостійного розв'язування.

Автори сподіваються, що посібник буде корисним для студентів різних форм навчання при вивченні та повторенні курсу вищої математики.

ЧАСТИНА I

Розділ 1 Елементи теорії множин і математичної логіки

§ 1. Елементи теорії множин

1.1. Множини і підмножини

Поняття *множини* використовується в усіх науках. Особливо широко воно використовується в математиці. Наприклад, в арифметиці розглядають множину натуральних чисел, множину простих чисел, множину складених чисел, в геометрії – множину трикутників, множину трапецій, в алгебрі – множину квадратних рівнянь, множину коренів рівняння тощо.

Поняття множини належить до основних математичних понять і тому воно не означається, а характеризується описово з використанням синонімів терміна “множина” та численних прикладів конкретних множин. Наприклад, синонімом терміна “множина” є термін “сукупність”.

Об’єкти, які утворюють дану множину, називаються *елементами* цієї множини. Наприклад, число 5 є елементом множини натуральних чисел, Земля є елементом множини планет Сонячної системи, слово “математика” є елементом множини іменників жіночого роду.

Множини позначатимемо великими латинськими буквами (можливо з індексами), наприклад A , B , A_1 , A_2 , а їх елементи – малими латинськими буквами, наприклад a , b , x_1 , x_2 , причому різні елементи позначають різними буквами. Проте один і той самий елемент множини може мати декілька різних позначень. Наприклад, нехай a – найменше двоцифрове натуральне число, що ділиться на 2, і b – найменше двоцифрове натуральне число, що ділиться на 5. Зрозуміло, що в обох випадках йдеться про одне і те саме число 10. Тому в таких випадках говорять, що a дорівнює b , і записують $a = b$.

Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить до множини A , а запис $b \notin A$ означає, що елемент b не належить до множини A . Наприклад, якщо Q – множина всіх раціональних чисел, то $2 \in Q$, $\frac{1}{7} \in Q$, $\sqrt{3} \notin Q$.

Множину можна задати переліком її елементів. Наприклад, те, що множина M складається з чисел 1, 3, 5, 7, записують так:

$$M = \{1, 3, 5, 7\}.$$